2019 年 7 月 30 日

信号とシステム　試験問題（担当：馬場口・中村）

【1】線形時不変な離散時間信号処理システム $L_1,\ L_2$ を次のように定める．まず L_1 は，入力信号 $x[n]$ に対し出力信号 $y[n]$ が整数定数 n_0 を用いて

$$y[n] \ = \ \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]$$

で与えられるシステムとする．次に L_2 は，そのインパルス応答が

$$h_2[n] \ = \ e^{-an}u[n]$$

で与えられるシステムとする．ただし，実数 a は $a>0$ を満たす定数であり，$u[n]$ は離散時間における単位ステップ信号である．以下の問いに答えよ．

(1) L_1 が線形性と時不変性の双方を満たすことを数式を用いて示せ．

(2) L_1 のインパルス応答 $h_1[n]$ を求め，さらに図示せよ．

(3) L_2 は BIBO 安定であるか否か，理由とともに答えよ．

以降では，L_1 と L_2 を縦続接続したシステムを考える．このシステム全体を L とし，そのインパルス応答を $h[n]$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(4) $h[n]$ と $h_1[n],\ h_2[n]$ の関係を数式で示せ．また，その関係式をもとに $h[n]$ を求めよ．

(5) L が因果的となるための条件を $h[n]$ に基づいて導け．

【2】連続時間信号 $x(t)$ を帯域制限された実信号とし，その最大角周波数を ω_m [rad/秒] とする．この $x(t)$ に対し，連続時間信号 $y(t)$ を

$$y(t) \ = \ x(t)\sin(\omega_c t)$$

と定義する．ここで ω_c は $\omega_c > \omega_m > 0$ を満たす定数である．$x(t),\ y(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $X(\omega),\ Y(\omega)$ とし，フーリエ変換対を記号 $\leftrightarrow$ を用いて $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ のように表す．ただし，フーリエ変換の順変換と逆変換の係数は各々1, $\frac{1}{2\pi}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$ となることを示せ．

(2) $\delta(\omega-\omega_0)$ の逆フーリエ変換をもとに，$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ を示せ．ただし，δ は Dirac のデルタ関数を表す．また，ω_0 は任意の定数であり，j は虚数単位（$j^2=-1$）である．

(3) 問い (2) のフーリエ変換対を利用して $\sin(\omega_c t)$ のフーリエ変換を求めよ．

(4) 任意の二つの信号 $q(t),\ r(t)$ について，そのフーリエ変換をそれぞれ $Q(\omega),\ R(\omega)$ とすると，$q(t)r(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}Q(\omega)*R(\omega)$ が成り立つことを示せ．

(5) 問い (3)(4) の結果に基づき，$Y(\omega)$ と $X(\omega)$ の関係を数式で表せ．また，問い (1) の結果も踏まえ，

$$|X(\omega)| \ = \ \begin{cases} 2 & (0 \le \omega \le \omega_m) \\ 0 & (\omega > \omega_m) \end{cases}$$

である場合の $|Y(\omega)|$ を図示せよ．

(6) $y(t)$ をサンプリング周波数 f_s [Hz] で一様サンプリングした際にエイリアシングが生じないためには，f_s はどのような条件を満たす必要があるか．理由とともに答えよ．

【3】 本講義の感想を述べよ。（分量は任意とするが必ず記載すること。）