2017 年 2 月 7 日

# 信号とシステム　試験問題 （担当：馬場口・中村）

【1】以下のような入力信号 $x(t)$ と出力信号 $y(t)$ の関係を持つ連続時間システムを考える。

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$$

ただし、$\omega_c$ は定められた角周波数とする。このシステムの無記憶性、因果性、安定性、時不変性、線形性を調べよ。根拠を数式等できちんと説明すること。

【2】連続時間信号 $h(t)$ を基本周期 $T_0$ [秒] の周期信号とし、そのフーリエ級数を

$$h(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k e^{jk\omega_0 t}\,, \quad H_k \;=\; \frac{1}{T_0}\int_{T_0} h(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

とする。ただし $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ [rad/秒] は $h(t)$ の基本角周波数である。一方、連続時間信号 $x(t)$ を非周期的な帯域制限信号とし、その最大角周波数を $\omega_m$ [rad/秒] とする。すなわち、$x(t)$ のフーリエ変換

$$X(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

は $|\omega| > \omega_m$ なる任意の $\omega$ に対し $X(\omega) = 0$ を満たす。$h(t)$ と $x(t)$ の畳み込みを

$$q(t) \;=\; h(t) * x(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

とする。また、$h(t)$ と $x(t)$ の積を $y(t) = h(t)x(t)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(i) 連続時間信号における周期性の数学的定義を、数式を交えて答えよ。

(ii) $q(t)$ が周期 $T_0$ の周期信号となることを示せ（問い (i) で答えた式が満たされることを示せ）。

(iii) $q(t)$ のフーリエ級数を

$$q(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k e^{jk\omega_0 t}$$

とするとき、係数 $Q_k$ は $Q_k = H_k X(k\omega_0)$ で与えられることを示せ。

(iv) $y(t)$ のフーリエ変換 $Y(\omega)$ は

$$Y(\omega) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_k X(\omega - k\omega_0)$$

となることを示せ。

以降では、基本周期 $T_0$ [秒] の連続時間周期信号 $h(t)$ の 1 周期分が $\delta(t)$ $(-\frac{T_0}{2} \leqq t \leqq \frac{T_0}{2})$ で与えられるものとする。ただし $\delta(t)$ は連続時間の単位インパルス信号である。

(v) このような $h(t)$ を $x(t)$ に乗じ $y(t)$ を得る処理は $x(t)$ に対するサンプリングと解釈できる。このことを踏まえ、$h(t)$ を $\delta$ および $T_0$ を用いて表せ。また、このように解釈した場合のサンプリング周波数 $f_s$ [Hz] を、$\omega_0$ を用いて表せ。

(vi) 問い (v) の $h(t)$ に対し、そのフーリエ係数 $H_k$ を求めよ。

(vii) 問い (iv)(vi) を踏まえ、$\omega_0$ が (a) $\omega_0 = 3\omega_m$ 、(b) $\omega_0 = \frac{3}{2}\omega_m$ であるときの $Y(\omega)$ を図示せよ。ただし本問では、$X(\omega)$ は $-\omega_m \leqq \omega \leqq \omega_m$ において $X(\omega) = 1$ であるとする。

(viii) カットオフ周波数 $\omega_m$ の理想ローパスフィルタによりエイリアシングなしに $Y(\omega)$ から $X(\omega)$ が抽出できるためには、$T_0$ はどのような条件を満たす必要があるか。問い (vii) で答えた図を参考に、数式を用いて答えよ。

【3】本講義の感想を述べよ。（分量は任意とするが必ず記載すること。）