2016 年 2 月 9 日

信号とシステム　試験問題（担当：馬場口 登）

【１】連続時間の正弦波信号

$$x(t) = \cos(15t) \tag{1}$$

をサンプリング間隔 T_s により $x[n] = x(nT_s)$ で均一サンプリングして離散時間信号を得る。以下の問いに答えよ。

i) $x[n]$ が周期信号となるようなサンプリング間隔 T_s を求めよ。

ii) ナイキスト間隔とはどのようなものか説明せよ。また式 (1) のナイキスト間隔を示せ。

iii) $T_s = 0.1\pi$ のとき、$x[n]$ の基本周期を求めよ。

iv) $T_s = 0.1\pi$ のとき、式 (1) を均一サンプリングして得られる $x[n]$ と同一の信号を与える連続時間正弦波信号 $x(t)$ のうち、より低い周波数のものを示せ。

【２】以下の問題文を読み、問いに答えよ。

実数値を持つ 2 つの連続時間信号 $u(t), v(t)$ に対して、時間シフトを τ とするとき、相互相関関数 $r_{uv}(\tau)$ を

$$r_{uv}(\tau) \stackrel{\triangle}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)v(t)dt$$

と定義する。さらに、$u = v$ のとき、$r_{uu}(\tau)$ を自己相関関数と定義する。

i) 相互相関関数の意味を述べよ。

ii) 自己相関関数は偶関数であることを示せ。

次に、連続時間信号 $x(t)$ とそのフーリエ変換 $X(\omega)$ の対を $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ で表す。このとき、フーリエ変換の順変換、逆変換の係数を各々1, $1/2\pi$ とする。

iii) 実信号 $x(t)$ を奇信号部分 $x_o(t)$ と偶信号部分 $x_e(t)$ に分解し、

$$x(t) \stackrel{\triangle}{=} x_o(t) + x_e(t) \leftrightarrow X(\omega) \stackrel{\triangle}{=} A(\omega) + jB(\omega)$$

であるとき、

$$x_e(t) \leftrightarrow A(\omega), \quad x_o(t) \leftrightarrow jB(\omega), \quad X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$$

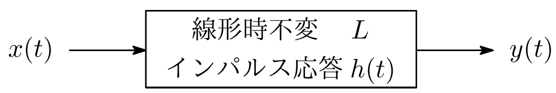
となることを示せ。但し、j は虚数単位、$\overline{X(\omega)}$ は $X(\omega)$ の複素共役を表す。

iv) 実信号 $x(t)$ の自己相関関数 $r_{xx}(\tau)$ とエネルギースペクトル $|X(\omega)|^2$ との間で、

$$r_{xx}(\tau) \leftrightarrow |X(\omega)|^2$$

が成り立つことを導出せよ。

さて、図のように実数値を持つ入力信号 $x(t)$ に対し、実数値の出力信号 $y(t)$ を出す線形時不変な連続時間システム L を考え、入出力関係を $y(t) = L[x(t)]$ と表す。このとき、L のインパルス応答を $h(t)$ で表す。



v) 線形時不変システムとは、入出力信号間でどのような関係を持つものか、数式で表せ。

vi) インパルス応答の定義を示し、その重要性について議論せよ。

vii) システム L への入力信号の自己相関関数 $r_{xx}(\tau)$ が、以下の条件、

$$r_{xx}(\tau) = \delta(\tau), \quad (\delta \text{は Dirac のデルタ関数})$$

を満足するとき、入力 $x(t)$ のエネルギースペクトル $|X(\omega)|^2$ を求め、どのような性質を持つか議論せよ。

viii) システム L の入力信号 $x(t)$ が問い vii) の条件を満たすとき、入出力信号の相互相関関数がインパルス応答に相当すること、すなわち、

$$r_{xy}(\tau) = h(\tau)$$

となることを示せ。

【３】本講義の感想を述べよ。（分量は任意とするが必ず記載すること。）