平成 28 年 8 月 2 日

ディジタル信号処理　試験問題（担当：馬場口　登）

【1】長さ N の離散時間信号 $x[n]$ $(n = 0,\ 1,\ \cdots,\ N–1)$ に対する N 点離散フーリエ変換（Discrete Fourier Transform; DFT）は

$$X[k] \ = \ \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \ \ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1) \tag{1}$$

で定義される（ただし $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$）．$N$ を 2 のべき乗とするとき，以下の問いに答えよ．

(i) DFT を効率よく計算するための手法に高速フーリエ変換（Fast Fourier Transform; FFT）がある．具体的な FFT アルゴリズムの一つである時間間引き FFT に関して，N 点 DFT を 2 回の $\frac{N}{2}$ 点 DFT に分割する原理を，数式を用いて説明せよ．

(ii) N 点 DFT を時間間引き FFT で計算する際に必要となる複素乗算の回数を C_N とする．問い (i) の内容を踏まえ，C_N と $C_{\frac{N}{2}}$ の関係を導出せよ．

(iii) 以下，$N \geq 4$ とする．時間間引き FFT において，N 点 DFT が 4 点 DFT まで分割された段階で，計算法を式 (1) の直接計算に戻すものとする．4 点 DFT の直接計算では，必要な複素乗算の回数を 1 回に抑えることができる（すなわち $C_4 = 1$）．その方法を説明せよ．

(iv) 問い (iii) の条件の下で C_N を具体的に求めよ（N の式として表せ）．

(v) 式 (1) とは逆に $X[k]$ から $x[n]$ を求める処理を逆離散フーリエ変換（Inverse Discrete Fourier Transform; IDFT）と呼ぶ．IDFT は次式で定義される．

$$x[n] \ = \ \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-nk} \ \ (n = 0,\ 1,\ \cdots,\ N-1) \tag{2}$$

式 (1) を計算するための FFT アルゴリズムにより式 (2) の IDFT が計算可能であることを示し，その手順を説明せよ．

【2】入出力差分方程式

$$y[n] \ = \ -\frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{4}x[n-2]$$

で表される離散時間信号処理システム L について，以下の問いに答えよ．ただし，$x[n]$, $y[n]$ はそれぞれシステム L に対する入力信号および出力信号を表す．

(i) システム L の伝達関数 $H(z)$ を求めよ．

(ii) システム L のインパルス応答 $h[n]$ を図示せよ．

(iii) システム L の周波数応答における振幅特性と位相特性を，角周波数 $[0,\ \pi]$ の範囲で図示せよ．

(iv) システム L に基本角周波数 Ω_0 の離散正弦波 $x[n] = \sin(\Omega_0 n)$ を入力した場合の出力信号は $y[n] = A\sin(\Omega_0 n + B)$ の形で表すことができる．この表現における A および B を，それぞれ Ω_0 を用いて表せ．

(v) 問い (iv) の $x[n]$ に N ステップ分の時間遅延を与えた信号を $q[n] = x[n-N]$ とおく．$q[n]$ を Ω_0, N, n で表せ．

(vi) 問い (iii)〜(v) の内容を参考に，周波数応答における振幅特性と位相特性の物理的な意味を説明せよ．

【3】本講義の感想を述べよ（分量は任意とするが必ず記載すること）．